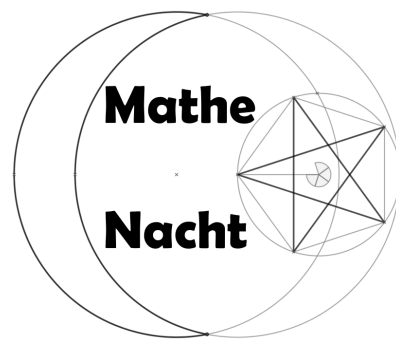
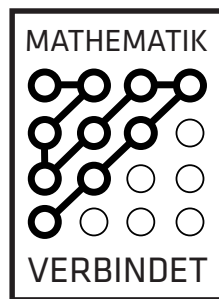


# Grundlagen



## 1. Aufgabe: (Quantoren und aussagenlogische Symbole)

- a) Formuliere die folgenden Aussagen mittels Quantoren oder verbal. Entscheide begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind. Dabei seien  $a$  eine ebene geometrische Fläche,  $V$  die Menge der Vierecke,  $R$  die Menge der Rechtecke,  $Q$  die Menge der Quadrate und  $P$  die Menge der Parallelelogramme.
- i)  $\exists a \in V : a \in R \wedge a \in P$
  - ii) Für alle Parallelelogramme gilt, dass sie keine Quadrate sind.
- b) Negiere folgende Aussagen. Dabei seien  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- i) Alle Studierenden sind blond.
  - ii)  $\forall x \exists y : x < y$ .

## 2. Aufgabe: (Beweise)

- a) Beweise mittels vollständiger Induktion.  
Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:
- $$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$
- b) Beweise mit einem direkten Beweis die Ungleichungen.  
Für reelle  $a, b > 0$  gilt:  $2ab \leq a^2 + b^2$  sowie  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .
- c) Beweise die folgende Aussage mit einem indirekten Beweis.  
Wenn das Quadrat einer natürlichen Zahl gerade ist, so ist die Zahl selbst gerade.

## 3. Aufgabe: ((Un-)Gleichungen mit reellen Zahlen)

Bestimme alle  $x \in \mathbb{R}$ , welche die folgende Gleichung bzw. Ungleichung erfüllen.

- a)  $x^2 - 5 \leq 4x$
- b)  $|2x - 13| = 4$

Bitte wenden.

**4. Aufgabe:** (*Mengen*)

Untersuche, ob folgende Mengen  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}$  bezüglich der Ordnungsrelation  $\leq$  in  $\mathbb{R}$  nach oben oder unten beschränkt sind.

Bestimme ggf. das Supremum bzw. Infimum.

Gib außerdem an, ob es sich um ein Maximum bzw. Minimum der Menge handelt.

a)  $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 2x + 4 > 5, x \geq 0\}$

b)  $M_2 = \{\frac{m \cdot n}{m^2 + n^2} : m, n \in \mathbb{N}\}$

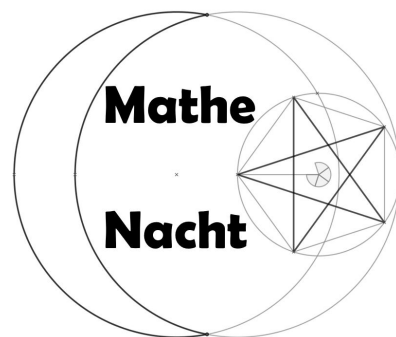
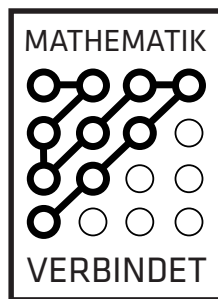
**5. Aufgabe:** (*LA Darstellung komplexer Zahlen*)

Skizziere die folgenden Mengen.

a)  $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3i| > |z + 3|\}$

b)  $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2 = |z + i|\}$

# Reihen



## 1. Aufgabe:

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge welche für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Eigenschaft  $a_n \geq 0$  erfüllt. Beweisen Sie die folgende Aussage: Falls  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert, so konvergiert auch  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ .

## 2. Aufgabe:

Untersuchen Sie für welche Werte  $p \in \mathbb{R}$  mit  $p > 0$  die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5p-4}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{p}\right)^n$$

jeweils konvergieren beziehungsweise divergieren.

## 3. Aufgabe:

Wahr oder Falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Aussage.

Sei  $c > 0$  eine Konstante so, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$  konvergiert. Dann muss auch die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-c)^n$  konvergieren.

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge. Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n = 0$  gilt, so konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Nullfolge. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konvergent.

Die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3p-3}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n$$

konvergieren, falls  $p = \frac{5}{3}$  ist.

Sei  $c > 0$  eine Konstante so, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$  konvergiert. Dann gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (c^2)^n$$

#### 4. Aufgabe:

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 3}}$
- $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n}{n+3}$
- $\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-3}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$

#### 5. Aufgabe:

Untersuchen Sie die Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} x^n$  auf ihr Konvergenzverhalten.

#### 6. Aufgabe:

Die Reihen  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$  konvergieren. Bestimmen Sie die jeweiligen Werte.

Tipp: Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}$$

gilt.

#### 7. Aufgabe:

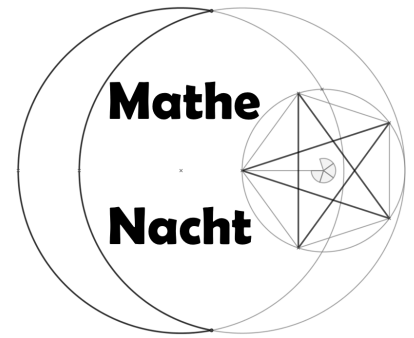
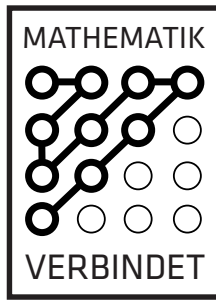
Zusatzaufgabe. Achtung schwierig!

Untersuchen Sie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$  auf ihr Konvergenzverhalten und bestimmen Sie den Reihenwert.

Hinweis: Beweisen Sie für alle  $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^m \frac{n}{e^n} = \frac{e^{m+1} + m(1-e) - e}{e^m(e-1)^2}$$

# Folgen



## 1. Aufgabe:

Bestimme die Grenzwerte der folgenden Zahlenfolgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

- $a_n = \frac{6n^3 + 1}{n^3 - n + 6}$
- $b_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
- $c_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$
- $d_n = \sqrt[n]{4 + \frac{n-1}{n+1}}$

## 2. Aufgabe:

Bestimme die Häufungswerte der folgenden Zahlenfolgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

- $a_n = \frac{1 + (-7)^n}{7^n}$
- $b_n = i^n$
- $c_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2}{(2n+3)^2}$

## 3. Aufgabe:

Weise die Konvergenz der folgenden rekursiv definierten Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach:  $a_1 = 1$ ,

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1$$

Zeige dazu:

- Beschränktheit nach oben [bzw. nach unten]
- monoton wachsend [bzw. fallend]
- Berechne den Grenzwert

#### **4. Aufgabe:**

Weise mit Hilfe der Definition die Konvergenz der Zahlenfolge  $a_n = \frac{n^2}{n^2+5} \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ) nach, indem zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $n$  angegeben werden kann, sodass  $|a_n - a| < \varepsilon \forall n > N \in \mathbb{N}$  gilt.

#### **5. Aufgabe:**

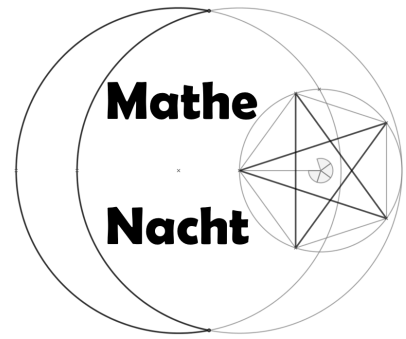
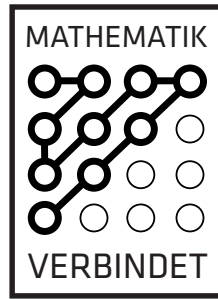
Wahr oder Falsch? Gebt eine kurze Begründung/Gegenbeispiel an.

- Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.
- Jede Nullfolge ist monoton fallend.
- Jede Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.
- Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

#### **6. Aufgabe:**

Beweise (ganz kurz): Für jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt:  
 $|a_n| \rightarrow |a|$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

# Funktionen



## 1. Aufgabe:

Überprüfe folgende Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

- a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow [5, \infty)$  mit  $f(x) = x^4 + 5$ .
- b)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f(x) = x^4 + 5$ .
- c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x \cdot \cos(x)$ .
- d)  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  mit  $f(x) = \frac{3x+11}{7}$ .
- e)  $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{falls } x \text{ gerade,} \\ \frac{x+1}{2} & \text{falls } x \text{ ungerade.} \end{cases}$

## 2. Aufgabe:

Seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$f(x) = \begin{cases} x^a \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Für welche  $a \geq 0$  ist  $f$  stetig an der Stelle  $x = 0$ ?

## 3. Aufgabe:

Seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha \cdot \beta > 0$ . Beweise, dass ein  $x_0 \in [a, b]$  existiert so, dass gilt

$$f(x_0) = \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta}.$$

## 4. Aufgabe:

(Nur BA)

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig stetig. Beweise, dass  $f$  dann auch beschränkt auf  $(a, b)$  ist.

## 5. Aufgabe:

(Nur BA)

Bestimme die Grenzfunktion der folgenden Funktionenfolgen  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $n \rightarrow \infty$  und untersuche, ob die Konvergenz auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig ist.

- a)  $f_n(x) = \arctan(nx)$ .
- b)  $f_n(x) = \frac{n \sin(x)}{n + \cos(x)}$  ( $n \geq 2$ ).

**6. Aufgabe:**  
**(Nur LAG)**

Bestimme alle Extremstellen der folgenden Funktionen. Gib jeweils an, an welchen Stellen es sich um Hoch- und an welchen um Tiefpunkte handelt. Was müsste man noch überprüfen, um herauszufinden, ob es sich um ein lokales oder globales Extremum handelt?

a)  $f(x) = -e^{-x+2}(x^2 - 15)$

b)  $g(x) = (-4 + x)x + (-2 + x) \cos(x) - \sin(x)$