Grundlagen

1. Aufgabe: (*Quantoren und aussagenlogische Symbole*)

a) Formuliere die folgenden Aussagen mittels Quantoren oder verbal.
Entscheide begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.
Dabei seien a eine ebene geometrische Fläche, V die Menge der Vierecke, R die Menge der Rechtecke, Q die Menge der Quadrate und P die Menge der Parallelogramme.

i) $\exists a \in V : a \in R \wedge a \in P$

ii) Für alle Parallelogramme gilt, dass sie keine Quadrate sind.

b) Negiere folgende Aussagen. Dabei seien $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Alle Studierenden sind blond.

ii) $\forall x \exists y : x < y$.

2. Aufgabe: (*Beweise*)

a) Beweise mittels vollständiger Induktion.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

b) Beweise mit einem direkten Beweis die Ungleichungen.
Für reelle $a, b > 0$ gilt: $2ab \leq a^2 + b^2$ sowie $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

c) Beweise die folgende Aussage mit einem indirekten Beweis.
Wenn das Quadrat einer natürlichen Zahl gerade ist, so ist die Zahl selbst gerade.

3. Aufgabe: (*(Un-)Gleichungen mit reellen Zahlen*)

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgende Gleichung bzw. Ungleichung erfüllen.

a) $x^2 - 5 \leq 4x$

b) $|2x - 13| = 4$

4. Aufgabe: (*Mengen*)

Untersuche, ob folgende Mengen $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}$ bezüglich der Ordnungsrelation $\leq$ in $\mathbb{R}$ nach oben oder unten beschränkt sind.
Bestimme ggf. das Supremum bzw. Infimum.
Gib außerdem an, ob es sich um ein Maximum bzw. Minimum der Menge handelt.

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 2x + 4 > 5, x \geq 0\}$

b) $M_2 = \{\frac{m \cdot n}{m^2+n^2} : m, n \in \mathbb{N}\}$

5. Aufgabe: (***LA*** *Darstellung komplexer Zahlen*)

Skizziere die folgenden Mengen.

a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3i| > |z + 3|\}$

b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2 = |z + i|\}$

Reihen

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge welche für alle $n \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $a_n \geq 0$ erfüllt. Beweisen Sie die folgende Aussage: Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

2. Aufgabe:

Untersuchen Sie für welche Werte $p \in \mathbb{R}$ mit $p > 0$ die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5p-4}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{p}\right)^n$$

jeweils konvergieren beziehungsweise divergieren.

3. Aufgabe:

Wahr oder Falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Aussage.

- ☐ Sei $c > 0$ eine Konstante so, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ konvergiert. Dann muss auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-c)^n$ konvergieren.
- ☐ Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Falls $\lim_{n\to\infty} 2a_n = 0$ gilt, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- ☐ Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Dann ist

  $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

  konvergent.
- ☐ Die Reihen

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3p-3}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n$$

  konvergieren, falls $p = \frac{5}{3}$ ist.
- ☐ Sei $c > 0$ eine Konstante so, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ konvergiert. Dann gilt

  $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (c^2)^n$$

4. Aufgabe:

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-3}}$
- $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n}{n+3}$
- $\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-3}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$

5. Aufgabe:

Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} x^n$ auf ihr Konvergenzverhalten.

6. Aufgabe:

Die Reihen $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ konvergieren. Bestimme Sie die jeweiligen Werte.

Tipp: Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}$$

gilt.

7. Aufgabe:

Zusatzaufgabe. Achtung schwierig!

Untersuchen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ auf ihr Konvergenzverhalten und bestimmen Sie den Reihenwert.

Hinweis: Beweisen Sie für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{n}{e^n} = \frac{e^{m+1} + m(1-e) - e}{e^m(e-1)^2}$$

Folgen

1. Aufgabe:

Bestimme die Grenzwerte der folgenden Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $a_n = \dfrac{6n^3+1}{n^3-n+6}$
- $b_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
- $c_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$
- $d_n = \sqrt[n]{4+\dfrac{n-1}{n+1}}$

2. Aufgabe:

Bestimme die Häufungswerte der folgenden Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $a_n = \frac{1+(-7)^n}{7^n}$
- $b_n = i^n$
- $c_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n^2}{(2n+3)^2}$

3. Aufgabe:

Weise die Konvergenz der folgenden rekursiv definierten Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1$

Zeige dazu:

- Beschränktheit nach oben [bzw. nach unten]
- monoton wachsend [bzw. fallend]
- Berechne den Grenzwert

4. Aufgabe:

Weise mit Hilfe der Definition die Konvergenz der Zahlenafolge $a_n = \frac{n^2}{n^2+5} \longrightarrow a\ (n \longrightarrow \infty)$ nach, indem zu jeden $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n angegeben werden kann, sodass $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n > N \in \mathbb{N}$ gilt.

5. Aufgabe:

Wahr oder Falsch? Gebt eine kurze Begründung/Gegenbeispiel an.

☐ Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

☐ Jede Nullfolge ist monoton fallend.

☐ Jede Folge bestitzt mindestens einen Häufungspunkt.

☐ Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

6. Aufgabe:

Beweise (ganz kurz): Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \longrightarrow a$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt:
$|a_n| \longrightarrow |a|\ (n \longrightarrow \infty)$.

Funktionen

1. Aufgabe:

Überprüfe folgende Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivtät.

a) $f : \mathbb{R} \to [5, \infty)$ mit $f(x) = x^4 + 5$.

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^4 + 5$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot \cos(x)$.

d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = \frac{3x+11}{7}$.

e) $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{falls } x \text{ gerade,} \\ \frac{x+1}{2} & \text{falls } x \text{ ungerade.} \end{cases}$

2. Aufgabe:

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} x^a \cdot \cos(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Für welche $a \geq 0$ ist f stetig an der Stelle $x = 0$?

3. Aufgabe:

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \cdot \beta > 0$. Beweise, dass ein $x_0 \in [a, b]$ existiert so, dass gilt

$$f(x_0) = \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta}.$$

4. Aufgabe:
(Nur BA)
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Beweise, dass f dann auch beschränkt auf (a, b) ist.

5. Aufgabe:
(Nur BA)
Bestimme die Grenzfunktion der folgenden Funktionenfolgen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ und untersuche, ob die Konvergenz auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig ist.

a) $f_n(x) = \arctan(nx)$.

b) $f_n(x) = \frac{n \sin(x)}{n+\cos(x)}$ $(n \geq 2)$.

6. Aufgabe:
(Nur LAG)

Bestimme alle Extremstellen der folgenden Funktionen. Gib jeweils an, an welchen Stellen es sich um Hoch- und an welchen um Tiefpunkte handelt. Was müsste man noch überprüfen, um herauszufinden, ob es sich um ein lokales oder globales Extremum handelt?

a) $f(x) = -e^{-x+2}(x^2 - 15)$

b) $g(x) = (-4 + x)x + (-2 + x)\cos(x) - \sin(x)$